· la fonction g_n est continue sur $]0;1]$ car elle est le produit de deux fonctions continues sur $]0;1]$.

· $\lim\limits_{t\to 0^+} g_n(t)=\lim\limits_{t\to 0^+} [-t^{n-1}.tLogt]=0=g_n(0)$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} [tLogt] = 0$.

$\Rightarrow g_n$ est continue à droite en 0.

Donc : g_n est continue sur $[0;1] \Rightarrow g_n$ est integrable sur $[0,1]$.

b- ⋆ la fonction qui à $t \mapsto$ Logt est dérivable sur $]0;1]$ aussi celle qui à $t \mapsto t^{n+1}$ est dérivable sur $]0;1]$

$\Rightarrow$ la fonction G_n est dérivable sur $]0;1]$

D'autre part $\forall t \in]0;1]$;

$$G_n'(t) = -\frac{1}{n+1}\left[(n+1)t^n Logt + t^{n+1}\frac{1}{t}\right] + \frac{(n+1)t^n}{(n+1)^2}$$

$$= -t^n Logt = g_n(t).$$

• $\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\frac{G_n(t)-G_n(0)}{t-0}\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}\left[-\frac{t^n Logt}{n+1}+\frac{t^n}{(n+1)^2}\right]=0=g_n(0)$

$\Rightarrow G_n$ est dérivable à droite en 0 et $G_n'(0) = g_n(0)$.

Bilan: ⋆ et • $\Rightarrow G_n$ est une primitive de g_n sur $[0,1]$.

⊗ $u_n = \int_0^1 g_n(t)dt = G_n(1) - G_n(0) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$.

2) Soit $n \in IN$ et t un réel quelconque .

a- $t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$

$= t\left[1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + \ldots + (-t^2)^n\right] + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$

$= t\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$ car $-t^2 \neq 1$

$= \frac{t - t(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}$.

b- Pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$\frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{tLogt}{1+t^2} = -Logt\left[t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}\right]$$

En distribuant (−Logt) sur chaque terme de la sommation

On obtient :

$$f(t) = g_1(t) - g_3(t) + g_5(t) + \ldots + (-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} g_{2n+3}(t)$$